

第2讲 二次函数解析式、图象变换

一、二次函数解析式

1. 二次函数一般式

任意一个二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 都可以运用配方法，把它的解析式化为 $y = a(x - h)^2 + k$ 的形式：

$$y = ax^2 + bx + c$$

_____ .

因此，抛物线的对称轴是直线 _____，顶点是 _____ .

$y = ax^2 + bx + c$		
a 的符号	$a > 0$	$a < 0$
开口方向	向__	向__
对称轴	$x = \underline{\hspace{2cm}}$	
顶点坐标	$\underline{\hspace{2cm}}$	
函数最值	有最__值__	有最__值__
	当定义域为全体实数时，函数的最小值或最大值是顶点__坐标的 值	
增减性	当 $x < \underline{\hspace{1cm}}$ 时， y 随 x 的增大 而__	当 $x < \underline{\hspace{1cm}}$ 时， y 随 x 的增大 而__
	当 $x > \underline{\hspace{1cm}}$ 时， y 随 x 的增大 而__	当 $x > \underline{\hspace{1cm}}$ 时， y 随 x 的增大 而__
开口大小	$ a $ 越大，开口__； $ a $ 越小，开口__。 在对称轴右侧，沿着逆时针方向， a 的值逐渐__。	

思考：

已知二次函数图象上的三点坐标（或称函数的三对对应值） (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 、 (x_3, y_3) ，确定该函数解析式

思路点拨：采用待定系数法求二次函数解析式

解：

！总结：

- ①任何二次函数都可以整理成__式 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的形式。
- ②已知任意__点坐标，可用一般式求解二次函数解析式。

举个“栗子”

栗子1

1. 二次函数 $y = x^2 + 2x - 5$ 有（ ）。

- A. 最大值 -5 B. 最小值 -5 C. 最大值 -6 D. 最小值 -6

2. 已知抛物线 $y = x^2 - 2mx - 4 (m > 0)$ 的顶点 M 关于坐标原点 O 的对称点为 M' ，若点 M' 在这条抛物线上，则点 M 的坐标为 () .

- A. $(1, -5)$ B. $(3, -13)$ C. $(2, -8)$ D. $(4, -20)$

栗子2

3. 若二次函数 $y = x^2 - 6x + 9$ 的图象经过 $A(-1, y_1)$ ， $B(1, y_2)$ ， $C(3 + \sqrt{3}, y_3)$ 三点 . 则关于 y_1 ， y_2 ， y_3 大小关系正确的是 () .

- A. $y_1 > y_2 > y_3$ B. $y_1 > y_3 > y_2$ C. $y_2 > y_1 > y_3$ D. $y_3 > y_1 > y_2$

栗子3

4. 已知抛物线 $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2$ ，当 $1 \leq x \leq 5$ 时， y 的最大值是 () .

- A. 2 B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{7}{3}$

栗子4

5. 当 $x \geq m$ 时，二次函数 $y = -x^2 + 3x$ 的函数值 y 随 x 的增大而减小，则实数 m 的取值范围是 _____ .

栗子5

6. 已知一个二次函数的图象经过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 和 $C(0, -3)$ 三点 .

(1) 求此二次函数的解析式 .

(2) 求此二次函数的图象的对称轴和顶点坐标 .

独步天下1

7. 已知两点 $M(-6, y_1)$ ， $N(2, y_2)$ 均在抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 上，点 $P(x_0, y_0)$ 是抛物线的顶点，若 $y_0 \leq y_2 < y_1$ ，则 x_0 的取值范围是 () .

- A. $x_0 < -2$ B. $x_0 > -2$ C. $-6 < x_0 < -2$ D. $-2 < x_0 < 2$

2. 二次函数顶点式

$y = \underline{\hspace{2cm}}$		
a 的符号	$a > 0$	$a < 0$
开口方向	向__	向__
对称轴	$x = \underline{\hspace{2cm}}$	
顶点坐标	$\underline{\hspace{2cm}}$	
函数最值	有最__值__	有最__值__
	当定义域为全体实数时，函数的最小值或最大值是顶点__坐标的 值	
增减性	当 $x < \underline{\hspace{1cm}}$ 时， y 随 x 的增大而 __	当 $x < \underline{\hspace{1cm}}$ 时， y 随 x 的增大而 __
	当 $x > \underline{\hspace{1cm}}$ 时， y 随 x 的增大而 __	当 $x > \underline{\hspace{1cm}}$ 时， y 随 x 的增大而 __

思考：

当已知抛物线的顶点坐标时，最少还需要几个点来确定二次函数的解析式？

！总结：

- ①已知抛物线__和图象上__一点，可利用顶点式求二次函数解析式
- ②已知__时，也可以设顶点式

🍎 举个“栗”子

栗子6

8. 二次函数 $y = 2(x+1)^2 + 3$ 的顶点坐标是 () .

- A. $(-1, -3)$ B. $(-1, 3)$ C. $(1, -3)$ D. $(1, 3)$

栗子7

9. 若 $A(-4, y_1)$, $B(-1, y_2)$, $C(2, y_3)$ 为二次函数 $y = -(x-2)^2 + 3$ 的图象上的三点，则 y_1 , y_2 , y_3 大小关系是 () .

- A. $y_1 < y_2 < y_3$ B. $y_3 < y_1 < y_2$ C. $y_3 < y_2 < y_1$ D. $y_2 < y_1 < y_3$

栗子8

10. 已知二次函数 $y = -3(x-h)^2 + 5$, 当 $x > -2$ 时， y 随 x 的增大而减小，则有 () .

A. $h \geq -2$

B. $h \leq -2$

C. $h > -2$

D. $h < -2$

栗子9

11. 一个二次函数的图象的顶点坐标是 $(2, 4)$ ，且过另一点 $(0, -4)$ ，则这个二次函数的解析式为 () .

A. $y = -2(x+2)^2 + 4$

B. $y = -2(x-2)^2 + 4$

C. $y = 2(x+2)^2 - 4$

D. $y = 2(x-2)^2 - 4$

栗子10

12. 已知某二次函数图象上部分点的横坐标 x 、纵坐标 y 的对应值如下表，求此函数表达式 .

x	...	-1	0	1	3	4	...
y	...	0	3	4	0	-5	...

3. 二次函数交点式

思考一：

如何求解二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交点坐标？

令 _____，可得 _____，所以方程的根就是二次函数与 x 轴交点的横坐标

思考二：

假设二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴有两个交点 $A(x_1, 0)$ ， $B(x_2, 0)$ ，即 x_1 ， x_2 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根，那么二次函数的解析式与 x_1 ， x_2 有什么关系呢？

由韦达定理有 _____，_____，

因此， $y = ax^2 + bx + c = a$ _____

$= a$ _____ $= a$ _____

由此可得： $y =$ _____ 也是表示二次函数的一种解析式，叫作 _____，其中 x_1 ， x_2 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根，即二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图象与 x 轴公共点的 _____ 坐标；对称轴为 _____

！总结：

当已知抛物线与 _____ 交点时，可设交点式求二次函数的解析式 .

1. 已知抛物线与 x 轴交点 $A(x_1, 0)$ ， $B(x_2, 0)$ 和图象上任意一点，设交点式 _____，再代入另一点坐标解关于 a 的方程即可；

2. 类似地，若已知抛物线与直线 $y = m$ 交点 $A(x_1, m)$ ， $B(x_2, m)$ 和图象上任意一点，设两根式 _____，再代入另一点坐标解关于 a 的方程即可 .

注意：二次函数的交点式不能作为最后的结果，要将其化为一般式或顶点式

举个“栗子”

栗子11

13. 如果抛物线经过点 $A(2,0)$ 和 $B(-1,0)$ ，且与 y 轴交于点 C ，若 $OC=2$ ，则这条抛物线的解析式是（ ）。

A. $y = x^2 - x - 2$

B. $y = -x^2 - x - 2$ 或 $y = x^2 + x + 2$

C. $y = -x^2 + x + 2$

D. $y = x^2 - x - 2$ 或 $y = -x^2 + x + 2$

栗子12

14. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图象上部分点的坐标如下表所示：

x	...	-1	0	1	2	...
y	...	0	3	4	3	...

则该函数图象的顶点坐标为（ ）。

A. $(-1,0)$

B. $(0,3)$

C. $(1,4)$

D. $(2,3)$

15. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a 、 b 、 c 为常数且 $a \neq 0$) 中的 x 与 y 的部分对应值如下表，该抛物线的对称轴是直线（ ）。

x	-1	0	1	3
y	-1	3	5	3

A. $x = 0$

B. $x = 1$

C. $x = 1.5$

D. $x = 2$

栗子13

16. 已知二次函数 $y_1 = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象经过三点 $(1,0)$ ， $(-3,0)$ ， $(0, -\frac{3}{2})$ 。

(1) 求二次函数的解析式。

(2) 若(1)中的二次函数，当 x 取 a ， b ($a \neq b$) 时，函数值相等，求 x 取 $a+b$ 时的函数值。

二、二次函数图象变换

1. 二次函数的平移

二次函数平移口诀：_____

	$y = ax^2 + bx + c$	$y = a(x - h)^2 + k$
上下平移 n 的单位的解析式	_____	_____
左右平移 m 的单位的解析式	_____	_____

举个“栗子”

栗子14

17. 要将抛物线 $y = x^2 + 2x + 3$ 平移后得到抛物线 $y = x^2$ ，下列平移方法正确的是（ ）.
- A. 向左平移 1 个单位，再向上平移 2 个单位 B. 向左平移 1 个单位，再向下平移 2 个单位
- C. 向右平移 1 个单位，再向上平移 2 个单位 D. 向右平移 1 个单位，再向下平移 2 个单位

栗子15

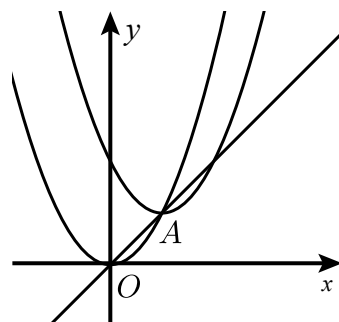
18. 若抛物线 $y = x^2 - 2x + 3$ 不动，将平面直角坐标系 xOy 先沿水平方向向右平移一个单位，再沿铅直方向向上平移三个单位，则原抛物线图象的解析式应变为（ ）.
- A. $y = (x - 2)^2 + 3$ B. $y = (x - 2)^2 + 5$ C. $y = x^2 - 1$ D. $y = x^2 + 4$

栗子16

19. 已知抛物线 $y = x^2 - 4x + 3$ 与 x 轴相交于点 A, B (点 A 在点 B 左侧)，顶点为 M . 平移该抛物线，使点 M 平移后的对应点 M' 落在 x 轴上，点 B 平移后的对应点 B' 落在 y 轴上. 则平移后的抛物线解析式为（ ）.
- A. $y = x^2 + 2x + 1$ B. $y = x^2 + 2x - 1$ C. $y = x^2 - 2x + 1$ D. $y = x^2 - 2x - 1$

栗子17

20. 如图，把抛物线 $y = x^2$ 沿直线 $y = x$ 平移 $\sqrt{2}$ 个单位长度后，其顶点在直线上的 A 处，则平移后的抛物线的解析式是（ ）.



- A. $y = (x + 1)^2 - 1$ B. $y = (x + 1)^2 + 1$ C. $y = (x - 1)^2 + 1$ D. $y = (x - 1)^2 - 1$

2. 二次函数的对称

二次函数关于坐标轴对称口诀：_____

	$y = ax^2 + bx + c$	$y = a(x - h)^2 + k$
关于 x 轴对称	_____	_____
关于 y 轴对称	_____	_____
关于原点对称	_____	_____

二次函数的特殊对称：

①关于顶点对称

$y = a(x - h)^2 + k$ 关于 x 轴对称后，开口大小_____，方向_____， a 变成____，顶点 (h, k) _____，所以新的解析式为_____。

②关于某点 (m, n) 对称

$y = a(x - h)^2 + k$ 关于原点对称后，开口大小_____，方向_____， a 变成____，把顶点 (h, k) 先关于 (m, n) 变成_____，所以新的解析式为_____。

③关于直线 $y = m$ 对称

$y = a(x - h)^2 + k$ 关于直线 $y = m$ 对称，开口大小_____，方向_____， a 变成____，把顶点 (h, k) 关于直线 $y = m$ 对称变成_____，所以新的解析式为_____。

④关于直线 $x = n$ 对称

$y = a(x - h)^2 + k$ 关于直线 $x = n$ 对称，开口大小_____，方向_____， a 变成____，把顶点 (h, k) 关于直线 $x = n$ 对称变成 $(2n - h, k)$ ，所以新的解析式为_____。

🍎 举个“栗子”

栗子18

21. 如果二次函数的图象与已知二次函数 $y = x^2 - 2x$ 的图象关于 y 轴对称，那么这个二次函数的解析式是 ()。

- A. $y = -x^2 + 2x$ B. $y = x^2 + 2x$ C. $y = -x^2 - 2x$ D. $y = \frac{1}{x^2 - 2x}$

栗子19

22. 在平面直角坐标系中，有两条抛物线关于 x 轴对称，且它们的顶点相距 6 个单位长度，若其中一条抛物线的函数表达式为 $y = -x^2 + 4x + m$ ，则 m 的值 ()。

- A. 1 或 7 B. -1 或 7 C. 1 或 -7 D. -1 或 -7

栗子20

23. 将抛物线 $y = (x - 1)^2 - 7$ 沿直线 $x = \frac{3}{2}$ 翻折，得到的新的抛物线的解析式为 _____ .

栗子21

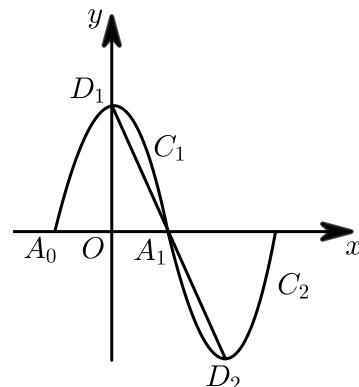
24. 将抛物线 $y = x^2 + 2x - 1$ 绕其顶点旋转 180° 后，所得到的新的抛物线的解析式为 _____ .

栗子22

25. 若将二次函数 $y = x^2 - 4x + 3$ 的图象绕着点 $(-1, 0)$ 旋转 180° ，得到新的二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ ，那么 c 的值为 () .
- A. -15 B. -8 C. -24 D. -9

独步天下2

26. 如图，一段抛物线 $y = -x^2 + 9 (-3 \leq x \leq 3)$ 为 C_1 ，与 x 轴交于 A_0, A_1 两点，顶点为 D_1 ；将 C_1 绕点 A_1 旋转 180° 得到 C_2 ，顶点为 D_2 ； C_1 与 C_2 组成一个新的图象．垂直于 y 轴的直线 l 与新图象交于点 $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$ ，与线段 D_1D_2 交于点 $P_3(x_3, y_3)$ ，且 x_1, x_2, x_3 均为正数，设 $t = x_1 + x_2 + x_3$ ，则 t 的最大值是 () .



- A. 15 B. 18 C. 21 D. 24